| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, … 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

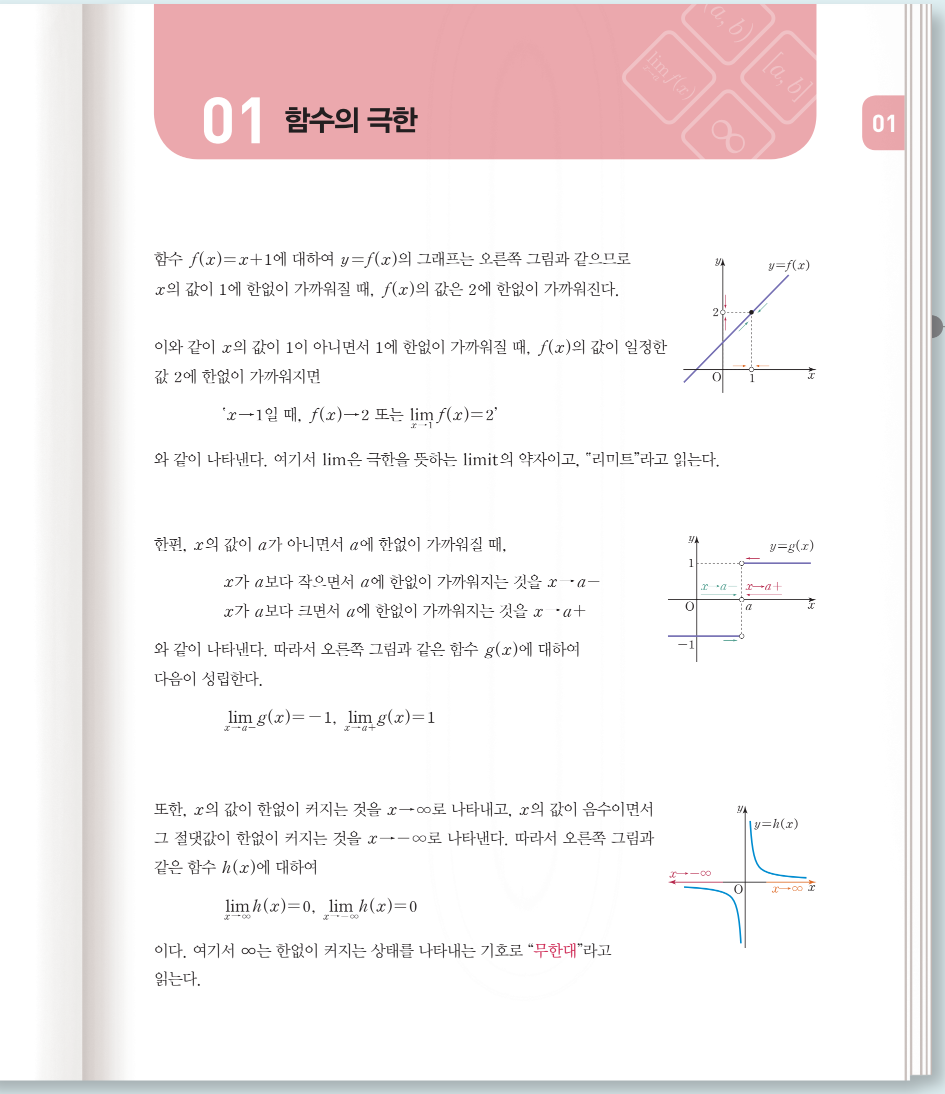
반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대…
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

- 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
- 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.



01 함수의 극한

함수 $f(x)=x+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

이와 같이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 2에 한없이 가까워지면

'$x\to1$일 때, $f(x)\to2$ 또는 $\lim_{x\to1}f(x)=2$'

와 같이 나타낸다. 여기서 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, "리미트"라고 읽는다.

한편, x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때,

x가 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x\to a-$

x가 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x\to a+$

와 같이 나타낸다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$\lim_{x\to a-}g(x)=-1$, $\lim_{x\to a+}g(x)=1$

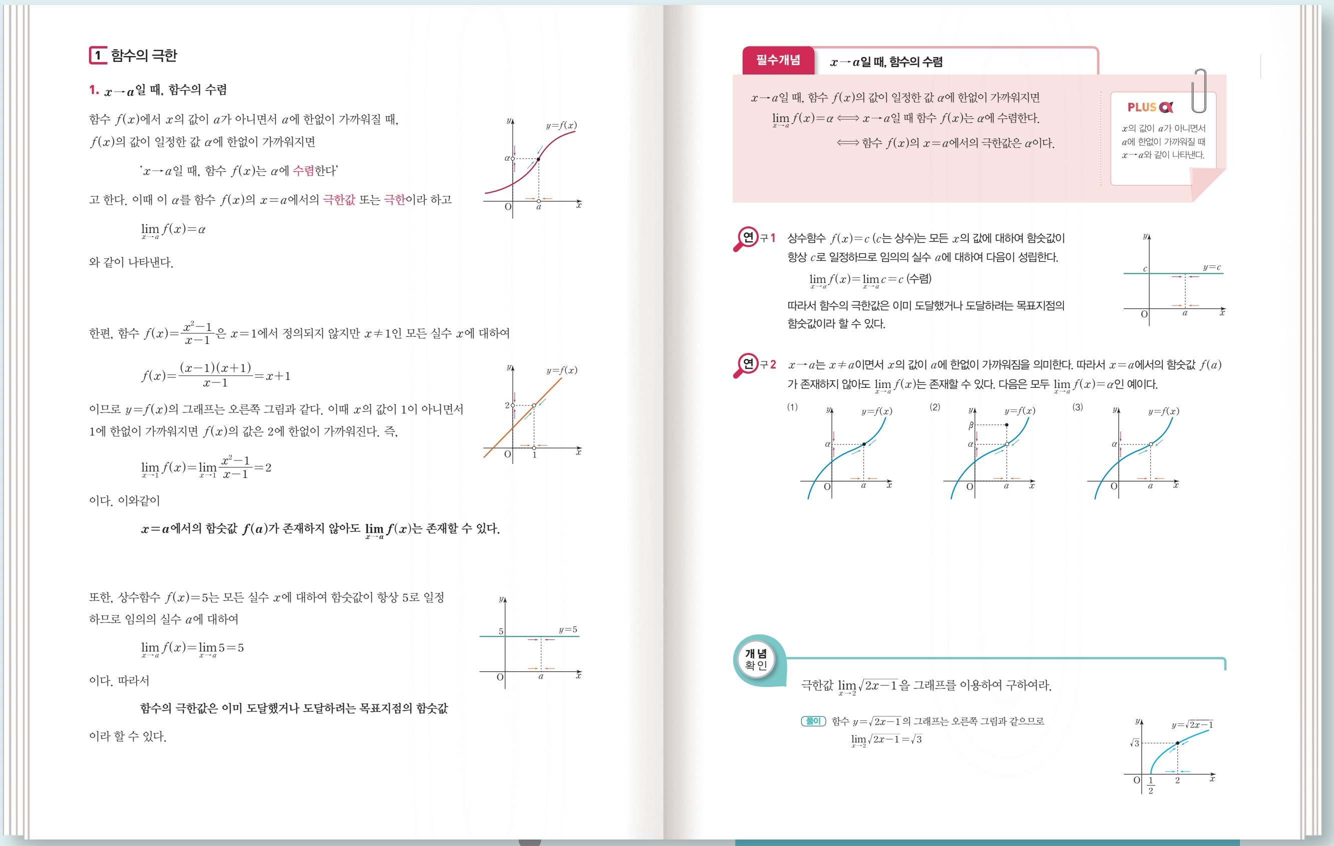
또한, x의 값이 한없이 커지는 것을 $x\to\infty$로 나타내고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 $x\to-\infty$로 나타낸다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $h(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}h(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$

이다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 "무한대"라고 읽는다.

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



1 함수의 극한

1. $x \to a$일 때, 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면

'$x \to a$일 때, 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다'

고 한다. 이때 이 α를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라 하고

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$$

와 같이 나타낸다.

한편, 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않지만 $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다. 즉,

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

이다. 이와같이

$x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않아도 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재할 수 있다.

또한, 상수함수 $f(x)=5$는 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 항상 5로 일정하므로 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} 5=5$$

이다. 따라서

함수의 극한값은 이미 도달했거나 도달하려는 목표지점의 함숫값

이라 할 수 있다.

필수개념 $x \to a$일 때, 함수의 수렴

$x \to a$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \iff x \to a$일 때 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다.

$\iff$ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값은 α이다.

PLUS α

x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $x \to a$와 같이 나타낸다.

연구 1 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 항상 c로 일정하므로 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} c=c \text{ (수렴)}$$

따라서 함수의 극한값은 이미 도달했거나 도달하려는 목표지점의 함숫값이라 할 수 있다.

연구 2 $x \to a$는 $x \neq a$이면서 x의 값이 a에 한없이 가까워짐을 의미한다. 따라서 $x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않아도 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재할 수 있다. 다음은 모두 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$인 예이다.

(1) (2) (3)

개념 확인

극한값 $\lim_{x \to 2}\sqrt{2x-1}$을 그래프를 이용하여 구하여라.

풀이 함수 $y=\sqrt{2x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \to 2}\sqrt{2x-1}=\sqrt{3}$$

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어 구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게 이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어 효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

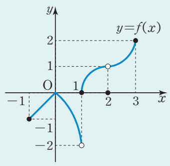
PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 1 그래프와 함수의 극한 ▶Link P. 13 필수개념

정의역이 $\{x|-1\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 극한값을 구하여라.



(1) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (2) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(3) $\lim_{x\to 1-} f(x)$ (4) $\lim_{x\to 1+} f(x)$

풀이

(1) x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

(2) x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

(3) x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=-2$

필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

노트 필기

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한 ➔ 유리식은 인수분해, 무리식은 유리화한다.

정답 및 해설 P 2

유제 2-1

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

유제 2-2

다음 극한값을 구하여라.

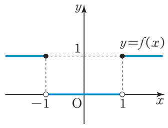
(1) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4+x^2}}$

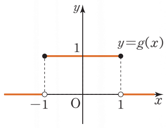
연 습 문 제

실력 완성

05 함수 $f(x)=\begin{cases} x-k & (x<0) \\ x^2-2x+3 & (x\geq 0) \end{cases}$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

06 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, **<보기>**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





보기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=1$ ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=-1$ ㄷ. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)g(x)=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

연습 문제

중단원별로 학습한 내용을 난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여 연산 능력 및 통합적 사고력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을 한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

Topic

특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를 통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강

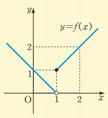
PRINCIPLES OF MATH

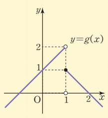
합성함수의 극한과 연속성

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 합성함수

$$g(f(x))\text{의 } x=1\text{에서의 연속성}$$

을 조사해 보자.

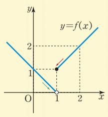




우선 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=1$$

이다.



그러나 x의 값의 변화에 따른 $f(x)$의 값의 변화를 조금 더 자세히 살펴보면

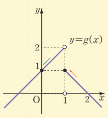
$$x\to 1-\text{일 때 } f(x)\to 0+,\ x\to 1+\text{일 때 } f(x)\to 1+$$

임을 알 수 있다. 한편, 함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=X$라 하면

$$f(x)\to 0+\text{일 때 } X\to 0+,\ f(x)\to 1+\text{일 때 } X\to 1+$$

이고

$$\lim_{X\to 0+} g(X)=1,\ \lim_{X\to 1+} g(X)=1$$



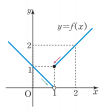
이므로 x의 값의 변화에 따른 합성함수 $g(f(x))$의 값의 변화를 표로 나타내면 다음과 같다.

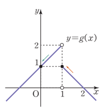
x	$f(x)$	$f(x)=X$	$g(X)$	$g(f(x))$

Topic 1 합성함수의 극한과 연속성 정답 및 해설 P 59

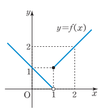
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 합성함수 $g(f(x))$의 극한과 연속성은 $f(x)=X$로 치환하여 $g(x)$의 극한을 조사한다.

x	$f(x)=X$	$g(X)=g(f(x))$
$x\to 1-$	$f(x)\to 0+$	$g(X)\to 1$
$x\to 1+$	$f(x)\to 1+$	$g(X)\to 1$
$x=1$	$f(1)=1$	$g(1)=1$





Topic 1-1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, **<보기>**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))=1$ ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))=1$

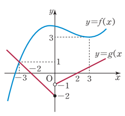
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Topic 1-2 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -x-2 & (x\leq 0) \\ \frac{1}{2}x-1 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, **<보기>**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

이 책의 차례

I 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한
1. 함수의 극한 12
2. 함수의 극한값의 계산 20

02 함수의 연속
1. 함수의 연속 42
2. 연속함수의 성질 46

II 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수
1. 미분계수 62
2. 도함수 68

04 접선의 방정식과 평균값 정리
1. 접선의 방정식 86
2. 평균값 정리 90

05 함수의 그래프와 미분
1. 함수의 그래프 102

06 미분의 활용
1. 방정식, 부등식과 미분 120
2. 속도, 가속도와 미분 124

Ⅲ 다항함수의 적분법

07 부정적분과 정적분

1. 부정적분의 뜻과 계산 138
2. 정적분 142
3. 정적분의 성질 148

08 정적분의 활용

1. 넓이와 정적분 162
2. 속도, 거리와 정적분 166

부 록

특강

1 합성함수의 극한과 연속성 182
2 구간이 나누어진 함수의 미분가능성 184
3 시간에 대한 변화율 186
4 정적분을 포함한 함수 188
5 포물선과 도형의 넓이 190

빠른 정답 194

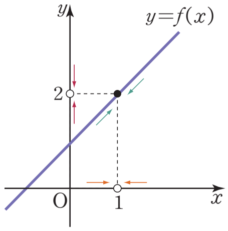
I 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

02 함수의 연속

01 함수의 극한

함수 $f(x)=x+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.



이와 같이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 2에 한없이 가까워지면

'$x \to 1$일 때, $f(x) \to 2$ 또는 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=2$'

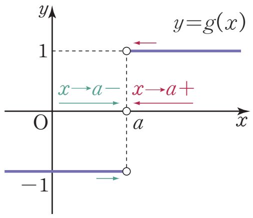
와 같이 나타낸다. 여기서 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, "리미트"라고 읽는다.

한편, x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때,

x가 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x \to a-$

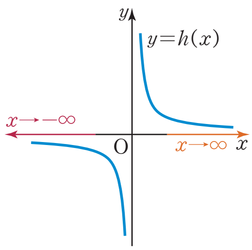
x가 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 $x \to a+$

와 같이 나타낸다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.



$$\lim_{x \to a-} g(x)=-1, \quad \lim_{x \to a+} g(x)=1$$

또한, x의 값이 한없이 커지는 것을 $x \to \infty$로 나타내고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 $x \to -\infty$로 나타낸다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $h(x)$에 대하여

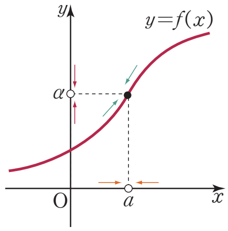


$$\lim_{x \to \infty} h(x)=0, \quad \lim_{x \to -\infty} h(x)=0$$

이다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 "무한대"라고 읽는다.

1 함수의 극한

1. $x \to a$일 때, 함수의 수렴



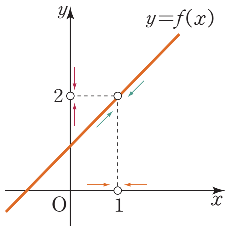
함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면

'$x \to a$일 때, 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다'

고 한다. 이때 이 α를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라 하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

와 같이 나타낸다.



한편, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않지만 $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여

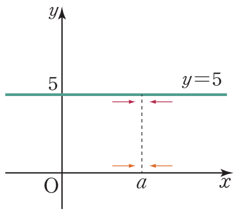
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다. 즉,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

이다. 이와같이

$x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않아도 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$는 존재할 수 있다.



또한, 상수함수 $f(x)=5$는 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 항상 5로 일정하므로 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 5 = 5$$

이다. 따라서

함수의 극한값은 이미 도달했거나 도달하려는 목표지점의 함숫값

이라 할 수 있다.

필수개념 $x \to a$일 때, 함수의 수렴

$x \to a$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \iff x \to a\text{일 때 함수 } f(x)\text{는 } \alpha\text{에 수렴한다.}$$

$$\iff \text{함수 } f(x)\text{의 } x=a\text{에서의 극한값은 } \alpha\text{이다.}$$

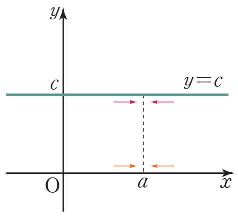
PLUS α

x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때 $x \to a$와 같이 나타낸다.

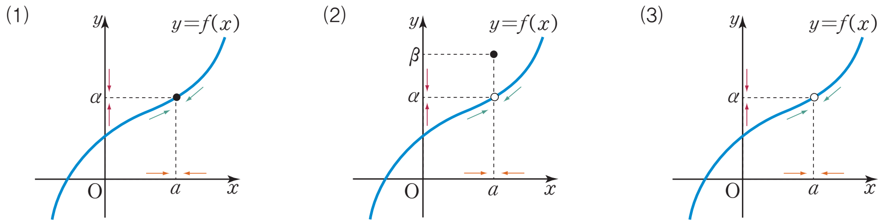
연구 1 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 항상 c로 일정하므로 임의의 실수 a에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c \text{ (수렴)}$$

따라서 함수의 극한값은 이미 도달했거나 도달하려는 목표지점의 함숫값이라 할 수 있다.



연구 2 $x \to a$는 $x \neq a$이면서 x의 값이 a에 한없이 가까워짐을 의미한다. 따라서 $x=a$에서의 함숫값 $f(a)$가 존재하지 않아도 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재할 수 있다. 다음은 모두 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$인 예이다.

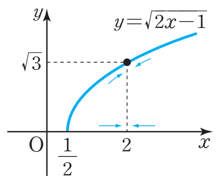


개념 확인

극한값 $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x-1}$을 그래프를 이용하여 구하여라.

풀이 함수 $y=\sqrt{2x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x-1} = \sqrt{3}$$



2. $x \to a$일 때, 함수의 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때,

$f(x)$의 값이 일정한 값에 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 발산한다고 한다.

특히, x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면

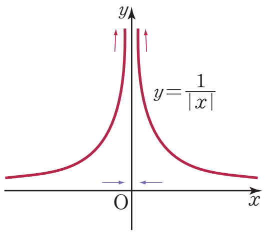
$f(x)$는 **'양의 무한대로 발산한다'**고 하며, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

와 같이 나타낸다.

예를 들어, 함수 $f(x) = \frac{1}{|x|}$에서 $x \to 0$일 때 $f(x)$의 값은 한없이 커진다.

즉, $x \to 0$일 때 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$



또한, x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면

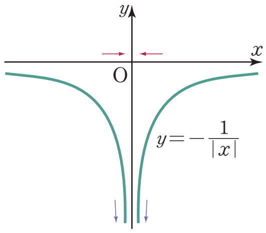
$f(x)$는 **'음의 무한대로 발산한다'**고 하며, $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

와 같이 나타낸다.

예를 들어, 함수 $g(x) = -\frac{1}{|x|}$에서 $x \to 0$일 때 $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

즉, $x \to 0$일 때 $g(x)$는 음의 무한대로 발산하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$$



∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이며 수가 아님에 주의한다.

필수개념

$x \to a$일 때, 함수의 발산

$x \to a$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값에 수렴하지 않으면

$x \to a$일 때 함수 $f(x)$는 발산한다.

(1) $x \to a$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 한없이 커지면

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Longleftrightarrow x \to a$일 때 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

(2) $x \to a$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow x \to a$일 때 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다.

PLUS α

함수가 수렴하지 않으면 극한값이 없다.

연구 1 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$는 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 극한값이 ∞라는 뜻이 아니라 $f(x)$의 값이 한없이 커지는 상태라는 것을 의미한다. 따라서 이때는 **'극한값이 없다'**고 한다.

연구 2 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$일 때, 다음이 성립한다.

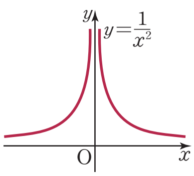
(1) 모든 실수 c에 대하여 $\lim_{x \to a} \{f(x) + c\} = \infty$

(2) $c > 0$이면 $\lim_{x \to a} cf(x) = \infty$, $c < 0$이면 $\lim_{x \to a} cf(x) = -\infty$

개념 확인

함수 $y = \frac{1}{x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

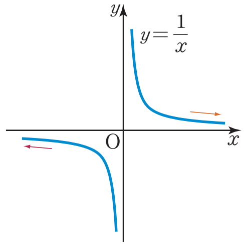
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$의 수렴, 발산을 조사하여라.



풀이 $x \to 0$일 때 $\frac{1}{x^2}$의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

즉, 양의 무한대로 발산한다.

3. $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때의 극한



함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$에서

x의 값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, $x \to \infty$일 때 함수 $f(x)$는 0에 수렴하므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

이다.

또한, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.
즉, $x \to -\infty$일 때 함수 $f(x)$는 0에 수렴하므로

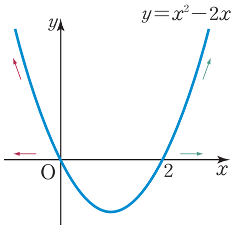
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

이다. 따라서

$x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 극한값은 0이다.

한편, $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



예를 들어, 함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여

$x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$, $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to \infty$

이므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

이다.